

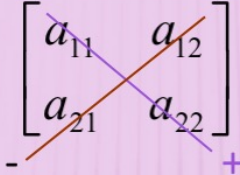
DETERMINAN

Setiap matriks bujur sangkar A yang berukuran $(n \times n)$ dapat dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut determinan matriks tersebut dan ditulis dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Untuk menghitung determinan ordo n terlebih dahulu diberikan cara menghitung determinan ordo 2

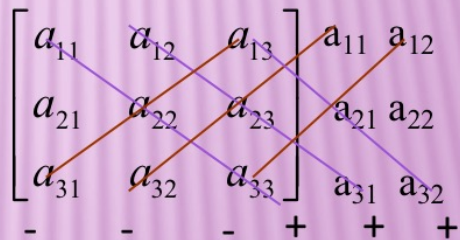
ATURAN SARRUS

○ $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$



$$\text{Det}(A_1) = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

○ $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$



$$\text{Det}(A_2) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

ATURAN SARRUS

○ $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$\text{Det}(M) = 3 \cdot (-2) - (1 \cdot 4) = -10$$

○ $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Det}(K) &= 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 4 - (2 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 5) \\ &= 30 + 24 + 8 - (16 + 36 + 10) = 62 - 62 = 0 \end{aligned}$$

- Pertanyaan: Apakah metode di atas dapat diterapkan pada matriks 4x4, 5x5 dst?

MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN KOFAKTOR

Untuk keperluan menghitung ordo n dengan $n \geq 3$ perlu lebih dahulu definisikan pengertian minor dan kofaktor sbb :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Minor M_{ij} adalah determinan matriks A dihapus baris ke i kolom ke j .

Kofaktor C_{13} adalah $(-1)^{i+j} M_{ij}$

$$M_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$



DEFINISI DETERMINAN MATRIKS DENGAN KOFAKTOR

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

M_{ij} det matriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke i kolom ke j matriks A .

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Definisi: Determinan matriks A (dengan ekspansi baris ke i , atau ekspansi kolom ke j) adalah :

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

CONTOH: MINOR DAN KOFAKTOR

Minor M_{ij} adalah determinan matriks A dihapus baris ke i kolom ke j .

Kofaktor C_{13} adalah $(-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{13} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{13} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

CONTOH:

- Hitunglah semua minor dan kofaktor matriks berikut ini:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$M_{11} = \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 10 \quad C_{11} = (-1)^{1+1} 10 = 10$$
$$M_{12} = \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 5 \quad C_{12} = (-1)^{1+2} 5 = -5$$
$$M_{13} = \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -4 \quad C_{13} = (-1)^{1+3} -4 = -4$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$C_{21} = ? \quad 0$$

$$C_{22} = ? \quad 15$$

$$C_{23} = ? \quad -12$$

$$C_{31} = ? \quad 0$$

$$C_{32} = ? \quad 0$$

$$C_{33} = ? \quad 6$$

MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN EKSPANSI BARIS/KOLOM

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

ekspansi baris pertama

$$= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

ekspansi baris kedua

$$= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

ekspansi baris ketiga

$$= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

ekspansi kolom pertama

$$= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

?

$$= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$$

?



CONTOH:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ada 9 (= 3x3) kofaktor

$$C_{11} = 10$$

$$C_{21} = 0$$

$$C_{31} = 0$$

$$C_{12} = -5$$

$$C_{22} = 15$$

$$C_{32} = 0$$

$$C_{13} = -4$$

$$C_{23} = -12$$

$$C_{33} = 6$$

Determinan A dengan ekspansi baris ketiga:

$$\text{Det}(A) = 4 \times 0 + 4 \times 0 + 5 \times 6 = 30$$

Determinan A dengan ekspansi kolom ketiga:

$$\text{Det}(A) = 5 \times 6 = 30$$

CATATAN TAMBAHAN

2

Metode Minor-Kofaktor

Misalkan, A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke- i dan kolom ke- j .

Minor matriks A_{ij} diberi notasi M_{ij} , dengan $M_{ij} = \det A_{ij}$.
Kofaktor matriks A_{ij} diberi notasi C_{ij} , dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Sehingga, diperoleh rumus determinan Matriks A , yaitu:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot C_{ij}, \text{ untuk sembarang kolom } j (j = 1, 2, \dots, n)$$

Atau

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot C_{ij}, \text{ untuk sembarang baris } i (i = 1, 2, \dots, n)$$

dengan a_{ij} = elemen matriks A_{ij}

- **Metode Minor-Kofaktor**

Berdasarkan rumus minor-kofaktor di atas, determinan matriks A dapat dicari dengan menghitung jumlah seluruh hasil kali antara kofaktor matriks bagian dari matriks A dengan elemen-elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A. Jadi, pertama, kita pilih salah satu baris atau kolom matriks A untuk mendapatkan nilai determinannya. Misalnya, kita pilih baris ke-1. Elemen-elemen matriks baris ke-1, yaitu a_{11} , a_{12} , dan a_{13} .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, karena kita pilih elemen-elemen pada baris ke-1, rumus determinan matriks yang kita gunakan adalah sebagai berikut:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot C_{ij}$$
$$\det A = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot C_{ij} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$$

Langkah kedua, kita cari kofaktor matriks bagian dari matriks A (C_{ij}). $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dan $M_{ij} = \det A_{ij}$ dengan A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke- i dan kolom ke- j . Maksudnya bagaimana? Oke, coba kamu perhatikan baik-baik ya.

Sebelumnya, kita telah memilih elemen-elemen pada baris ke-1, yaitu a_{11} , a_{12} , dan a_{13} . Oleh karena itu, matriks bagian dari matriks A nya adalah A_{11} , A_{12} , dan A_{13} .

- A_{11} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ maka } M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{12} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-2.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ maka } M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{13} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-3.

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Rumus Determinan Matriks dengan Ekspansi Kofaktor

- Menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

- Menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} \\&= 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\&= 4 \cdot (4 - 10) - 2 \cdot (8 - 15) + 8 \cdot (4 - 3) \\&= -24 + 14 + 8 = -2\end{aligned}$$

Contoh

Hitunglah $\text{Det}(A)$ dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Misalkan, kita akan menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor ***sepanjang baris ke-3***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \det(A) = \sum_{j=1}^3 a_{3j} c_{3j} = a_{31} c_{31} + a_{32} c_{32} + a_{33} c_{33}$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1((1)(1) - (0)(2)) = 1 - 0 = 1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1((2)(1) - (0)(1)) = -1(2 - 0) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1((2)(2) - (1)(1)) = 4 - 1 = 3$$

$$\det(A) = 0(1) + 1(-2) + 2(3) = 0 - 2 + 6 = 4$$